รายงานผลการวิจัย

เรื่อง การพัฒนาของตัวควบคุม H_∞ แบบใหม่สำหรับการทำมีความเสถียรภาพของโครงข่ายประสาทเทียมควบคู่แบบผสมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา

The development of new H_∞ for stabilization of neural network with mixed coupling and time-varying delays

ได้รับการจัดสรรงบประมาณวิจัย ประจำปี 2561

จำนวน 50,000 บาท

หัวหน้าโครงการ ชนิกานต์ เอมหฤทัย

งานวิจัยเสร็จสิ้นสมบูรณ์

......./............./.........

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยเรื่อง การพัฒนาของตัวควบคุม H_∞ แบบใหม่สำหรับการทำมีความเสถียรภาพของโครงข่ายประสาทเทียมควบคู่แบบผสมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา สำเร็จลุล่วงได้ด้วยการได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากสำนักวิจัยและส่งเสริมวิชาการเกษตร มหาวิทยาลัยแม่โจ้ ประจำปีงบประมาณ 2561 ผู้วิจัยขอขอบคุณสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยแม่โจ้ ที่อนุเคราะห์เรื่องสถานที่ และอุปกรณ์บางอย่างที่ใช้ในการดำเนินการวิจัยให้เสร็จสิ้นสมบูรณ์

ผู้วิจัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	1
Abstract	2
คำนำ	3
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	4
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
การตรวจเอกสาร	5
การทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	9
อุปกรณ์และวิธีการ	18
ผลการวิจัย	22
วิจารณ์ผลการวิจัย	27
สรุปผลการวิจัย	27
เอกสารอ้างอิง	29

การพัฒนาของตัวควบคุม H_∞ แบบใหม่สำหรับการทำมีความเสถียรภาพของโครงข่ายประสาทเทียมควบคู่แบบผสมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา

The development of new H_∞ for stabilization of neural network with mixed coupling and time-varying delays

ชนิกานต์ เอมหฤทัย
Chanikan Emharuethai

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยแม่โจ้ จ.เชียงใหม่ 50290

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อออกแบบและสร้างตัวควบคุม H_∞ใหม่ ให้กับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสมเพื่อให้มีความเสถียรภาพ โดยที่ตัวหน่วงศึกษา คือ ตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาแบบช่วงซึ่งไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ และการเชื่อมต่อแบบผสมเราจะใช้การเชื่อมต่อระหว่างเซลล์ประสาทเทียมกับเซลล์ประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา ซึ่งอาศัยหลักการและทฤษฎีบทของไลปูนอฟ โดยการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกีใหม่ บนพื้นฐานเมตริกซ์กำลังสองนูน รวมกับการปรับปรุงเทคนิคขอบเขต สำหรับพจน์อินทิกรัล เช่น อสมการเวอทิงเกอร์ ต่อมาเราก็จะได้เงื่อนไขที่เพียงพอใหม่สำหรับการมีเสถียรภาพสำหรับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงพร้อมทั้งมีการเชื่อมต่อแบบผสม ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยคิดค้นและออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะ คือ ตัวควบคุมแบบ H_∞ (H_∞ control) ซึ่งตัวควบคุมที่ใส่เข้าไปในโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสมเป็นบางช่วงเวลาและบางจุดของการเชื่อมต่อเท่านั้น ซึ่งมีประโยชน์มากในด้านประหยัดค่าใช้จ่ายในการควบคุมและลดเวลาในการประมวลผลของการทำงานของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสม สุดท้ายได้สร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขของการควบคุมให้กับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสม และสร้างตัวอย่างเชิงตัวเพื่อยืนยันประสิทธิภาพของการทำงานตัวควบคุมที่สร้างขึ้น และได้สร้าง

ทฤษฎีบทขึ้นมาใหม่ พร้อมทั้งได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่สร้างขึ้น เพื่อเป็นการยืนยันทฤษฎีบทและสามารถนำไปประยุกต์ในทางอุตสาหกรรมได้จริง

คำสำคัญ: การควบคุม H_∞, การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง, ตัวหน่วงที่ขึ้นกับเวลาแบบช่วง, ฟังก์ชันไลปูนอฟ, อสมการเมตริกซ์สามเหลี่ยม

Abstract

In this paper, H_∞ control for a class of neural network with mixed coupling and time-varying delays is studied. The time delay is a continuous function belonging to a given interval, which means that the lower and upper bounds for the time-varying delay are available, but the delay function is not necessarily differentiable. Based on Lyapunov-Krasovskii theory combined with Leibniz- Newton's formula, new delay- dependent sufficient conditions for the exponential stabilization and novel criteria for the existence of guaranteed cost controllers are established in terms of LMIs. Numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the theoretical results.

Keywords: H_∞ control, Exponential stabilization, interval time-varying delays, Lyapunov function, Linear matrix inequalities.

คำนำ

ในปัจจุบันนี้ โครงข่ายประสาทเทียมได้มีนักวิจัยศึกษากันอย่างกว้างขวางเพราะโครงข่ายประสาทเทียมนี้ได้ปรากฏในธรรมชาติและการประยุกต์ใช้หลากหลายสาขาวิชาทางวิทยาศาสตร์ ทางวิศวกรรมศาสตร์ ทางเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น โครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่เราสนใจศึกษา หมายถึง โครงข่ายที่มีส่วนประกอบหลายส่วนซึ่งแต่ละส่วนมีความสัมพันธ์และมีความเกี่ยวข้องกันค่อนข้างมาก เช่น โครงข่ายคอมพิวเตอร์ (computer networks) สายใยอาหาร (food web) โครงข่ายเส้นประสาทเทียม (neural networks) โครงข่ายปัญญาประดิษฐ์(artificial Intelligence network) โครงข่ายกำลังไฟฟ้า (electrical power networks) เป็นต้น เนื่องจากการทำงานของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนมีการทำงานที่พร้อมกัน (synchronization) และมีการส่ง - รับข้อมูลกันอย่างมากจึงทำให้การทำงานทั้งระบบมีประสิทธิภาพไม่ดีเท่าที่ควร นั่นคือ การไม่มีความเสถียรภาพ (instability) หรือประสิทธิภาพของการทำงานลดลง (poor performance) ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องมีการควบคุมการทำงานของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนเพื่อให้ประสิทธิภาพของการทำงานมีความเสถียรภาพและน่าเชื่อถือได้ จึงได้มีการออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะสมกับโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อน ซึ่งจะเห็นว่าโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนนั้นมีจุดการเชื่อมต่อจำนวนมาก จึงเป็นเรื่องยากมากที่จะทำการควบคุมทุกจุดของการเชื่อมต่อได้ จึงได้มีนักวิจัยได้คิดค้นตัวควบคุมเพื่อใส่เข้าไปที่จุดเชื่อมต่อเป็นบางจุดเท่านั้น แต่สามารถทำให้การทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนทั้งโครงข่ายมีความเสถียรภาพ ซึ่งปัจจุบันตัวควบคุมที่ใช้นั้นมีหลากหลายมาก เช่น ตัวควบคุมแบบ เอช-อินฟินิตี้(H_∞ control) ตัวควบคุมแบบย้อนกลับ(feedback control) ตัวควบคุมแบบแอคทีพ (active control) ตัวควบคุมแบบกระตุ้น (impulsive control) ตัวควบคุมชนิดปรับตัวได้ (adaptive control) ตัวควบคุมแบบช่วง (intermittent control) เป็นต้น ซึ่งตัวควบคุมดังกล่าวจะต้องใส่เข้าไปในการทำงานของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงตลอดเวลาที่ ทำการประมวลผลเพื่อหาคำตอบ ซึ่งจะทำให้มีค่าใช้จ่ายต้นทุนในการควบคุมและเสียเวลาในประมวลผลมาก ดังนั้นงานวิจัยในครั้งนี้จึงได้คิดค้นและออกแบบตัวควบคุมใหม่ที่เหมาะสมเพื่อลดค่าใช้จ่ายและประหยัดเวลาในการประมวลผล

ในโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนทั่วไป มักจะมีตัวหน่วง (delay) ที่เกี่ยวข้องในระบบ โดยอาจจะเกิดจากการถูกรบกวนจากภายนอก หรือจากระยะทาง เช่น การทำนายปริมาณน้ำฝนในอนาคต การทำนายแนวโน้มของหุ้น ระบบการสื่อสาร เป็นต้น ซึ่งระบบต่างๆเหล่านั้น มีการใช้

ข้อมูลย้อนหลังหรือตัวหน่วง เพื่อบอกแนวโน้มของข้อมูลในอนาคต อย่างไรก็ตามเป็นที่ทราบกันโดยทั่วไปว่า ตัวหน่วงเหล่านี้อาจจะส่งผลให้ระบบไม่เสถียรได้ ดังนั้นการศึกษาเงื่อนไขการมีเสถียรภาพของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงจึงเป็นหัวข้อวิจัยที่สำคัญอย่างมาก และในทำนองเดียวกัน ในระบบโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงโดยทั่วไป มักจะมีการถูกรบกวนจากทั้งปัจจัยภายในและจากภายนอก ซึ่งการถูกรบกวนนี้เราไม่ทราบแน่นอนถึงปริมาณเชิงกายภาพ แต่เราสามารถควบคุมให้ปัจจัยรบกวนเหล่านี้อยู่ในระดับที่ยอมรับได้ ด้วยเหตุผลเหล่านี้ นักวิจัยหลายท่านโดยเฉพาะนักคณิตศาสตร์และวิศวกร จึงได้สนใจศึกษาค้นคว้าถึงปัญหาการมีเสถียรภาพ การมีเสถียรภาพทนทาน (robust stability) การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (exponential stability) การมีเสถียรภาพทนทานแบบเลขชี้กำลัง (robust exponential stability) และการทำให้มีเสถียรภาพทนทาน (robust stabilization)

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาและวิเคราะห์ พร้อมทั้งปรับปรุงเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการทำให้มีความเสถียรภาพของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนด้วยการควบคุม H_∞ และตัวหน่วงแปรผันตามเวลา
2. เพื่อออกแบบและสร้างตัวควบคุมใหม่สำหรับการทำให้มีความเสถียรภาพของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนด้วยการควบคู่การควบคุม H_∞ และตัวหน่วงแปรผันตามเวลา
3. เพื่อสร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขของตัวควบคุมใหม่สำหรับการทำให้มีความเสถียรภาพของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนด้วยการควบคุม H_∞ และตัวหน่วงแปรผันตามเวลา
4. เพื่อสร้างและพัฒนานักวิจัยรุ่นใหม่ คือนักศึกษา ระดับปริญญาตรี ระดับปริญญาโท และปริญญาเอกทางคณิตศาสตร์ในประเทศไทย โดยเฉพาะในหัวข้อทฤษฎีควบคุมและการวิเคราะห์เสถียรภาพ รวมทั้งการประยุกต์ทางด้านแบบจำลองคณิตศาสตร์ซึ่งจะเพิ่มความเข้มแข็งทางวิชาการและสร้างความร่วมมือด้านการวิจัยต่อไป

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

การได้มาซึ่งองค์ความรู้ใหม่จากการวิจัยในครั้งนี้ คาดว่าจะได้รับการตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ นั่นเป็นผลสำเร็จตามเป้าประสงค์ (Goal Result) โดยงานวิจัยนี้เป็นประโยชน์อย่างมากในการอ้างอิงในสาขาเชิงวิเคราะห์ และสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาทางวิศวกรรมศาสตร์

คอมพิวเตอร์ ปัญญาประดิษฐ์ (Artificial Intelligence, AI) โครงข่ายประสาทเทียม (Artificial Neural Network) ทางการแพทย์ เป็นต้น อีกทั้งยังสร้างและพัฒนานักวิจัยรุ่นใหม่ คือนักศึกษา ระดับปริญญาตรี ระดับปริญญาโท และปริญญาเอกทางคณิตศาสตร์ในประเทศไทย โดยเฉพาะในหัวข้อทฤษฎีควบคุม และการวิเคราะห์เสถียรภาพ รวมทั้งการประยุกต์ทางด้านแบบจำลองคณิตศาสตร์ซึ่งจะเพิ่มความเข้มแข็งทางวิชาการและสร้างความร่วมมือด้านการวิจัยต่อไป และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (basic science) อีกด้วยอันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติอย่างแท้จริง

การตรวจเอกสาร

ทฤษฎีบทพื้นฐานของการมีเสถียรภาพศึกษาได้จากตำรา และจากเอกสารอ้าง อิงที่เกี่ยวข้อง โดยในลำดับแรก จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้น นิยาม ความหมาย และสัญลักษณ์ต่างๆ และทำการทบทวนเอกสารงานวิจัยที่ตีพิมพ์แล้วอย่างครบถ้วนครอบคลุมตาม ลำดับ ดังต่อไปนี้

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจเราจึงใช้สัญลักษณ์แทนเซตต่าง ๆ ดังนี้

R แทน เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

R^{+} แทน เซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด

R^{n} แทน เซตของเวกเตอร์ค่าจริงทั้งหมด ที่มีมิติ $(n\times 1)$

$R^{n\times n}$ แทน เซตของเมทริกซ์ค่าจริงทั้งหมด ที่มีมิติ $(n\times n)$

$C_{n,\tau}$ หรือ $C([-\tau,0],R^{n})$ แทน ปริภูมิบานาคของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่ส่งจากช่วงปิด $[-\tau,0]$ ไปยัง R^{n}

$C^{v}_{n,\tau}=\{\phi\in C_{n,\tau}:\|\phi\|_{c}<v\}$ เมื่อ v เป็นจำนวนจริงบวก

$\|\phi\|_{c}=\sup\limits_{-\tau\le t\le 0}\|\phi(t)\|$ เมื่อ $\phi\in C_{n,\tau}$

$\dot{x}(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

กำหนดให้เมทริกซ์ $A\in R^{n\times n}$

$\lambda(A)$ แทน เซตของค่าเจาะจง (eigenvalue) ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

$\lambda_{\min}(A) = \min\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$

$\lambda_{\max}(A) = \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$

$A > 0$ หมายถึง $x^T Ax > 0, \quad \forall x \neq 0, x \in R^n$

$A < 0$ หมายถึง $x^T Ax < 0, \quad \forall x \neq 0, x \in R^n$

พิจารณาสมการ

$$\dot{x}(t) = f(t,x)$$

โดยที่ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, $x_i = x_i(t)$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ และ $f_i = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

<u>บทนิยาม 1</u> จุดสมดุลของสมการ (1) คือ $x = a$ ที่ทำให้ $f(t,a) = 0$

<u>บทนิยาม 2</u> กำหนดให้ $\overline{0} = (0,0,...,0)$ เป็นจุดสมดุลของสมการที่ (1) แล้วจะกล่าวว่า $\overline{0}$

(1) **เสถียร (stable)** ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ มี $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ ซึ่งถ้า $\|x(t_0)\| < \delta$ แล้ว $\|x(t)\| < \varepsilon$ สำหรับทุก $t \geq t_0 \geq 0$

(2) **เสถียรเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable)** ถ้า $\overline{0}$ เป็นจุดสมดุลเสถียร และ $\|x(t)\| \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$

(3) **ไม่เสถียร (unstable)** ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไข (1) นั่นคือ มี $\varepsilon > 0$ ทุก $\delta > 0$ มี $x(t_0)$ ซึ่ง $\|x(t_0)\| < \delta$ และ $\|x(t)\| < \varepsilon$ สำหรับบางค่า $t \geq t_0$

<u>บทนิยาม 3</u> ฟังก์ชันไลปูนอฟ (Lyapunov function)

กำหนดให้ $V(x): R^n \to R$ เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า $V(x)$ เป็นฟังก์ชันไลปูนอฟของระบบสมการ (1) ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้จริง

1. $V(x)$ และ ทุกอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ โดยที่ $i = 1, 2, 3, ..., n$ ต่อเนื่อง

2. $V(x)$ เป็น **บวกแน่นอน** (positive definite) นั่นคือ $V(\bar{0})=0$ และ $V(x)>0$ สำหรับ $x \neq \bar{0}$

3. อนุพันธ์ของ $V(x)$ เทียบกับ t คือ

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n\end{aligned}$$

เป็น **กึ่งลบแน่นอน** (negative semidefinite) นั่นคือ $\dot{V}(\bar{0})=0$ และ $\dot{V}(x)\leq 0$ สำหรับ $x \neq \bar{0}$

<u>ทฤษฎีบท 1</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad \text{และ} \quad f(t,\bar{0})=0 \ \text{เมื่อ} \ x(t_0)=x_0$$

(i) จุดสมดุลของระบบ (2) จะ **เสถียรภาพ** ถ้ามีฟังก์ชันไลปูนอฟ $V(x)$ ที่สอดคล้องกับนิยาม 3

(ii) จุดสมดุลของระบบ (2) จะ**เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ** ถ้ามีฟังก์ชันไลปูนอฟ $V(x)$ ที่สอดคล้องกับบทนิยาม 3 และอนุพันธ์ของ $V(x)$ เป็นลบแน่นอน (negative definite) นั่นคือ ถ้า $\dot{V}(\bar{0})=0$ และ $\dot{V}(x)<0$ สำหรับ $x \neq \bar{0}$

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = f(t,x_t), \quad t \geq t_0, \\ &x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0],\end{aligned}$$

เมื่อ $x(t)\in R^n, \tau \in R^+,\ x_t(\theta)=x(t+\theta), \forall\theta\in[-\tau,0],\ \phi(t)\in C^v_{n,\tau}$ เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขค่าเริ่มต้น และ $f(t,\phi): R^+ \times C^v_{n,\tau} \to R^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและสอดคล้องกับเงื่อนไขลิพชิทซ์ ซึ่ง $f(t,0)=0$

ทฤษฎีบทไลปูนอฟ-ราซูมิคิน (Lyapunov-Razumikhin Theorem)

ให้ $f(t,\phi): R\times C_{n,\tau} \to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากเซตที่มีขอบเขตของ $C_{n,\tau}$ ไปยังเซตที่มีขอบเขตของ R^n และให้ $u,v,w,p: R^+ \to R^+$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันไม่ลด ซึ่ง $u(s), v(s), w(s), p(s)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก สำหรับ $s>0, u(0)=v(0)=0$

ถ้ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง $V: R\times R^n \to R$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

$$u(\|x\|)\le V(t,x)\le v(\|x\|),\quad t\in R,\quad x\in R^n$$

และสอดคล้องกับอสมการ

$$\dot{V}(t,x(t))\le -w(\|x(t)\|),\ \text{ถ้า}\ V(t+\theta,x(t+\theta)) < p(V(t,x(t))),\ \ \forall\theta\in[-\tau,0]$$

แล้วจะได้ว่า ระบบสมการ **(3)** มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเอกรูป (uniformly asymptotically stable)

ทฤษฎีบทไลปูนอฟ-คราซอฟสกี (Lyapunov-Krasovskii Theorem)

ให้ $f(t,\phi): R\times C_{n,\tau} \to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากเซตที่มีขอบเขตของ $C_{n,\tau}$ ไปยังเซตที่มีขอบเขตของ R^n และให้ $u,v,w: R^+ \to R^+$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันไม่ลด ซึ่ง $u(s), v(s), w(s)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก สำหรับ $s>0, u(0)=v(0)=0$

ถ้ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง $V: R\times C_{n,\tau} \to R$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

(1). $u(\|\phi(0)\|)\le V(t,\phi)\le v(\|\phi\|_c)$

(2). $\dot{V}(t,\phi)\le -w(\|\phi(0)\|)$

แล้วจะได้ว่า ระบบสมการ (3) มีเสถียรภาพเอกรูป (uniformly stable)

และถ้า $w(0)=0$ จะได้ว่า แล้วจะได้ว่า ระบบสมการ **(3)** มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $w(s)>0, s>0$ แล้วจะได้ว่า ระบบสมการ **(3)** มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเอกรูป (uniformly asymptotically stable)

<u>*หมายเหตุ*</u> ฟังก์ชัน V ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทข้างต้น ถูกเรียกว่า **ฟังก์ชันไลปูนอฟ**

ทฤษฎีบท 2 กำหนดให้ K เป็นเมทริกซ์สมมาตรจะกล่าวว่า K เป็นเมทริกซ์ลบแน่นอนก็ต่อเมื่อทุกค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) เป็นจำนวนจริงลบ กำหนดให้ K เป็นเมทริกซ์สมมาตรจะกล่าวว่า K เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อทุกค่าเจาะจง (eigenvalue) เป็นจำนวนจริงบวก

บทตั้ง 1 (Schur complement) กำหนดให้ $Q,S,R \in R^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ซึ่ง

$R(x)>0, Q(x)=Q^T(x)$ และ $R(x)=R^T(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & -R(x) \end{bmatrix} < 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } Q(x)+S(x)R^{-1}(x)S^T(x)<0$$

บทตั้ง 2 $\lambda_{\min}(Q)x^T x \le x^T Qx \le \lambda_{\max}(Q)x^T x$ สำหรับเมทริกซ์สมมาตร $Q \in R^{n\times n}$ และ สำหรับทุก $x \in R^n$

บทตั้ง 3 สำหรับเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอน $M(>0)$, r เป็นจำนวนจริงบวกและฟังก์ชันเวกเตอร์ $W:[0,r] \to R^n$ อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\left(\int_0^r W(s)ds\right)^T M\left(\int_0^r W(s)ds\right) \le r\left(\int_0^r W^T(s)MW(s)ds\right)$$

การทบทวนงานวิจัยเกี่ยวกับข้อง

ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมา ได้มีนักวิจัยเริ่มที่จะศึกษาโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วง ได้อธิบายในรูปแบบสมการดังนี้ [1]-[7]

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij}^1 f_i(x_i(t-h)) + I_i, \ i=1,2,....,N$$

$$x_i(t)=\phi_i(s), \quad s\in[-h,0]$$

โดยที่ $x_i(t)$ เป็นสถานะของเซลล์ประสาท N จำนวนของเซลล์ประสาท $a_i \in \mathbb{R}^+$ เป็นสัมประสิทธิ์ของเซลล์ประสาท $W=\{w_{ij}\}$, $W^1=\{w_{ij}^1\}$ เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักของตัวเชื่อมต่อ (connection weighting matrix) $f_i(x_i(t))$ เป็นฟังก์ชันกระตุ้นของเซลล์ประสาท โดยที่ $f_i(x_i(t))$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้ $|f_i(u)-f_i(v)| \le \mu_i|u-v|$ สำหรับ $u,v\in\mathbb{R}$ I_i เป็นตัวใส่

ข้อมูลสัญญาณ $h>0$ เป็นตัวหน่วง $\phi_i(s)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น หรือสามารถเขียนให้อยู่ในรูปต่อไปนี้ได้

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + Wf(x(t)) + W^1 f(x(t-h)) + I$$

โดยที่ $x(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t)]^T \in \mathbb{R}$,

$A = diag(a_1, a_2, ..., a_N)$, โดยที่ $a_i \in \mathbb{R}^+$,

$f(x(t)) = [f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), ..., f_N(x_N(t))]^T$,

$I = [I_1, I_2, ..., I_N]^T$

ในปี ค.ศ. 1998 J. Cao และ D. Zhou ได้ศึกษาและหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพวงกว้าง ของโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วง (7) โดยที่เงื่อนไขที่ได้ไม่ขึ้นอยู่กับตัวหน่วง และเงื่อนที่ได้จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

1. $\dfrac{\mu_i}{a_i}\sum_{j=1}^{N}(|w_{ij}| + |w^1_{ji}|) < 1,$

2. $\dfrac{1}{a_i}\sum_{j=1}^{N}[\mu_j(|w_{ij}| + |w^1_{ij}|) + \mu_i(|w_{ji}| + |w^1_{ji}|)] < 2,$

3. $\dfrac{1}{a_i}\sum_{j=1}^{N}[\mu_j^2|w_{ij}| + |w_{ji}| + \mu_j|w^1_{ij}| + \mu_i|w^1_{ji}|)] < 2,$

4. $\dfrac{1}{a_i}\sum_{j=1}^{N}[|w_{ij}| + \mu_i^2|w_{ji}| + \mu_j|w^1_{ij}| + \mu_i|w^1_{ji}|)] < 2,$

5. $\dfrac{1}{a_i}\sum_{j=1}^{N}[\mu_j|w_{ij}| + \mu_i|w_{ji}| + \mu_j^2|w^1_{ij}| + |w^1_{ji}|)] < 2,$

ต่อมาในปี ค. ศ. 2000 S. Arik และ V. Tavsanoglu [2] ได้ศึกษาและหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพวงกว้าง ของโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วง (8) โดยที่เงื่อนไขที่ได้ไม่ขึ้นอยู่กับตัวหน่วง และได้เงื่อนไขที่ดีกว่า J. Cao และ D. Zhou สำหรับเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพวงกว้าง ของโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วง (8) มีดังนี้

1. $-(W + W^T)$ เป็นบวกแน่นอน

2. $\|W^1\|_2 \le 1$ โดยที่ $\|W^1\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(W^1 W^{1T})}$

และ ในปีเดียวกัน T.-L. Liao และ F.-C. Wang ก็ได้เงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพวงกว้าง ของโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วง (8) ดังนี้

1. $-(W + W^T + \beta I)$ เป็นบวกแน่นอน

2. $\|W^1\|_2 \le \sqrt{1+\beta}$ โดยที่ $\|W^1\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(W^1 W^{1T})}$

โดยที่ $\beta > 0$ ซึ่งจะเห็นว่าเงื่อนไขที่ได้นั่นดีกว่า S. Arik และ V. Tavsanoglu เมื่อเราให้ $\beta = 0$ จะได้เงื่อนไขเหมือนกัน แต่เมื่อ $\beta > 0$ เงื่อนไขของ S. Arik และ V. Tavsanoglu ไม่ สามารถสรุปการมีเสถียรภาพวงกว้างได้

ในปี ค.ศ. 2002 S. Arik ได้ศึกษาและหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีเสถียรภาพวงกว้างของโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วง (8) โดยเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท 2 จุดสมดุลของ (8) จะเสถียรภาพวงกว้าง ถ้ามี เมทริกซ์ P ที่เป็นบวกแน่นอน และมีเมทริกซ์ K ที่ไม่เป็นลบแน่นอน ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $PW + W^T P + K$ เป็นลบแน่นอน

2. $-2P - K + I + PW^1 W^{1T} P$ เป็นกึ่งลบแน่นอน

ซึ่งสองเงื่อนไขนี้จะครอบคลุมถึงเงื่อนไขของ S.Arik และ V. Tavsanoglu [2], J. Cao และ D. Zhou [4] อีกทั้งยังเป็นกรณีเฉพาะของ S. Arik [1] ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ $P = I$ และ $K = 0$ เงื่อนไขในทฤษฎีบท 2 จะได้ $W + W^T < 0$ และ $W^1 W^{1T} - I \le 0$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขใน J. Cao และ D. Zhou ดังนั้น เงื่อนไขใน J. Cao และ D. Zhou [6] เป็นกรณีหนึ่งของ S. Arik

กรณีที่ 2 ให้ $P = I$ และ $K = \beta I$ โดยที่ $\beta > 0$ เงื่อนไขในทฤษฎีบท 2 จะได้ $W + W^T + \beta I < 0$ และ $W^1 W^{1T} - (\beta+1) I \le 0$ นั่นคือ . $\|W^1\|_2 \le \sqrt{1+\beta}$ จะได้ว่า $W^1 W^{1T} - (\beta+1) I \le 0$ ดังนั้นเงื่อนไขใน S.Arik และ V. Tavsanoglu [2] เป็นกรณีหนึ่งของ S. Arik [1]

ต่อมานักวิจัยหลายท่านได้ค้นคว้าศึกษาและหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา ได้อธิบายในรูปแบบสมการดังนี้ [8]-[15]

$$\dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij} f_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{N} w_{ij}^1 f_i(x_i(t-h(t))) + I_i(t),$$

หรือ

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + Wf(x(t)) + W^1 f(x(t-h(t))) + I(t)$$

โดยที่ $h(t) > 0$ เป็นตัวหน่วงแปรผันตามเวลาที่สามารถหาอนุพันธ์ได้

ในปี ค.ศ. 2005 Q. Zhang, X. Wei และ j. Xu [14] ได้ศึกษาและหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา (10) โดยที่ $h(t) > 0$ เป็นตัวหน่วงแปรผันตามเวลาที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และสอดคล้องอสมการ $0 \le h(t) \le h$ และ $h'(t) \le h^* < 1$ โดยที่ $h = \sup_{t\in\mathbb{R}} h(t)$ และ $h^* = \sup_{t\in\mathbb{R}} h'(t)$ กำหนดให้ $f_i(x_i(t))$ ฟังก์ชันกระตุ้นของเซลล์ประสาทมีขอบเขตและสอดคล้องกับเงื่อนไขนี้

$$0 \le \frac{f_i(\alpha) - f_i(\beta)}{\alpha - \beta} \le L_i \text{ สำหรับทุก } \alpha \ne \beta$$

เงื่อนไขที่เพียงพอที่ได้นั่นจะขึ้นอยู่กับขนาดของตัวหน่วงด้วย ซึ่งอธิบายได้ในทฤษฎีบทดังนี้

<u>**ทฤษฎีบท 3**</u> จุดสมดุลของ (10) จะเสถียรภาพเลขชี้กำลังวงกว้าง ถ้ามีค่าคงที่บวกซึ่งสอดคล้องอสมการ $0 < k < \min\{a_i\},\ d_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,N$ และเมทริกซ์ $Q > 0$ ที่เป็นบวกแน่นอนและเมทริกซ์ $P \ge 0$ ที่เป็นกึ่งบวกแน่นอน ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังนี้

$$\begin{pmatrix} hP - 2D(A-kI)L^{-1} + DW + W^T D & e^{kh}W^{1T}Q^{-1} & DQ \\ e^{kh}Q^{-1}W^1 & -Q^{-1} & 0 \\ QD & 0 & -Q \end{pmatrix} < 0$$

โดยที่ $L = diag(L_i)$ และสำหรับ $h^* < 0$

<u>**ทฤษฎีบท 4**</u> จุดสมดุลของ (10) จะเสถียรภาพเลขชี้กำลังวงกว้าง ถ้ามีค่าคงที่บวกซึ่งสอดคล้องอสมการ $0 < k < \min\{a_i\},\ d_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,N$ และ เมทริกซ์ $Q > 0$ ที่เป็นบวกแน่นอนและเมทริกซ์ $P \ge 0$ ที่เป็นกึ่งบวกแน่นอน ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังนี้

$$\begin{pmatrix} hP-2D(A-kI)L^{-1}+DW+W^{T}D & \frac{e^{kh}}{\sqrt{1-h^{*}}}W^{1T}Q^{-1} & DQ \\ \frac{e^{kh}}{\sqrt{1-h^{*}}}Q^{-1}W^{1} & -Q^{-1} & 0 \\ QD & 0 & -Q \end{pmatrix}<0$$

สำหรับ $0<h^{*}<1$

จากทั้งสองทฤษฎีบทก็สามารถสร้างขั้นตอนการแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเพื่อที่จะหาค่าสูงสุดของ k ซึ่ง k คืออัตราของการลู่เข้าแบบเลขชี้กำลัง ขั้นตอนการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่เหมาะสมอธิบายได้ดังนี้

1. Maximize k
2. แก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยใช้ โปรแกรม Matlab และเขียนโค้ดขึ้นมาเพื่อแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ผลที่ได้ คือ ได้ค่า $k=0.19$ ซึ่งเป็นค่าสูงสุด

ต่อมาในปี ค.ศ. 2006 J. Park [13] ได้ศึกษาและหาเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา (10) และ $h(t)>0$ ยังเป็นตัวหน่วงแปรผันตามเวลาที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ เงื่อนไขที่เพียงพอที่ได้นั่นจะขึ้นอยู่กับขนาดของตัวหน่วงด้วย ซึ่งอธิบายได้ในทฤษฎีบทดังนี้

<u>**ทฤษฎีบท 5**</u> กำหนดให้ $0\le h(t)\le h$, $h'(t)\le h^{*}<1$ และ $\sum=diag\{L_1,L_2,....,L_N\}$ จุดสมดุลของ (10) จะเสถียรภาพเลขชี้กำลังวงกว้างด้วยอัตราการลู่เข้า k ถ้ามีเมทริกซ์ P, Q, R ที่เป็นบวกแน่นอนและเมทริกซ์แนวเฉียง $D=diag\{d_1,d_2,...,d_N\}$ ที่เป็นบวก ที่ซึ่งสอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} \Pi_1 & PW+4kD & PW^{1} \\ * & \Pi_2 & DW^{1} \\ * & * & \Pi_3 \end{pmatrix}<0$$

โดยที่

$$\Pi_1=2kP-PA-A^{T}P+R,$$
$$\Pi_2=DW+W^{T}D+Q-2DA\Sigma^{-1},$$
$$\Pi_3=-(1-h^{*})e^{-2kh}(Q+\Sigma^{-1}R\Sigma^{-1}).$$

ในปัจจุบัน [15]-[17] ได้มีนักวิจัยได้ศึกษาและหาเงื่อนสำหรับโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบผสม และได้อธิบายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดังหนึ่งได้ดังนี้

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + Wg(x(t)) + W_1 g(x(t-\tau(t))) + W_2 \int_{t-\tau(t)}^{t} g(x(s))ds + u(t)$$

$$y(t) = g(x(t))$$

$$x(t) = \phi(t), \quad -\bar{\tau} \le t \le 0$$

โดยที่ $0 \le \tau(t) \le \bar{\tau}$ ยังเป็นตัวหน่วงแปรผันตามเวลาที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ในการหาเงื่อนไขที่เพียงพอ ได้ใช้บทตั้งใหม่ดังนี้

บทตั้ง 1. กำหนดจำนวนเต็มบวก m,n และจำนวนจริง $\beta \in (0,1)$ เมทริกซ์ $R > 0$ และ เมทริกซ์ $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ สำหรับทุก $\xi \in \mathbb{R}^m$ และฟังก์ชัน $\Theta(\beta, R)$ นิยามโดย

$$\Theta(\beta, R) = \frac{1}{\beta}\xi^T W_1^T R W_1 \xi + \frac{1}{1-\beta}\xi^T W_2^T R W_2 \xi$$

แล้วถ้ามี เมทริกซ์ $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ที่สอดคล้อง $\begin{bmatrix} R & X \\ X^T & R \end{bmatrix} > 0$ และอสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\min_{\beta\in(0,1)} \Theta(\beta, R) \ge \begin{bmatrix} W_1\xi \\ W_2\xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R & X \\ X^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1\xi \\ W_2\xi \end{bmatrix}$$

ต่อมาปี 2017 Z. Chen [16] ได้ศึกษาและหาเงื่อนไขที่เพียงพอความเสถียรภาพสำหรับโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบผสมที่มีตัวไม่ทราบค่าอยู่ในโครงข่ายประสาทเทียมด้วย และได้อธิบายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดังหนึ่งได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &-(A+\Delta A(t))x(t) + (W+\Delta W(t))g(x(t)) + (W_1+\Delta W_1(t))g(x(t-\tau(t))) \\ &+(W_2+\Delta W_2(t)) \int_{t-\tau(t)}^{t} g(x(s))ds + u(t)\end{aligned}$$

$$y(t) = g(x(t))$$

$$x(t) = \phi(t), \quad -\bar{\tau} \le t \le 0$$

โดยที่ตัวไม่ทราบค่านิยามตามสมการต่อไปนี้

$$\left[\Delta A(t) \quad \Delta W(t) \quad \Delta W_1(t) \quad \Delta W_2(t)\right] = \left[G_1F_1(t)E_1 \quad G_2F_2(t)E_2 \quad G_3F_3(t)E_3 \quad G_4F_4(t)E_4\right]$$

ซึ่ง G_i และ E_i, $(i=1,2,3,4)$ เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ $F_i(t)$, $(i=1,2,3,4)$ เป็นฟังก์ชันเมทริกซ์ที่แปรผันตามเวลาสอดคล้องกับ $F^T(t)F(t) \le I$ สำหรับงานวิจัยได้หาเงื่อนที่เพียงพอสำหรับการทำงานของโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบผสมที่มีตัวไม่ทราบค่า โดยได้อาศัยบทตั้งต่อไปนี้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก

บทตั้ง 2. กำหนดให้เมทริกซ์ D, E และ F โดยที่ $F^T F \le I$ และจำนวนจริงบวก $\varepsilon > 0$ จะได้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$DFE + (DFE)^T \le \varepsilon DD^T + \varepsilon^{-1} E^T E$$

และในปี 2017 X. Lv [17] ได้ศึกษาและหาเงื่อนไขที่เพียงพอความมีเสถียรภาพสำหรับโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบผสมโดยมีตัวหน่วงเป็นแบบแปรผันตามเวลาที่เป็นช่วง และตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบแจกแจงที่เป็นช่วง และได้อธิบายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดังหนึ่งได้ดังนี้

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t-h(t))) + D\int_{t-\sigma_2(t)}^{t-\sigma_1(t)} f(x(s))ds + u(t)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad -\tau_{\max} \le t \le 0$$

โดยที่ งานวิจัยนี้ได้กำหนดเงื่อนต่อไปนี้สำหรับการมีเสถียรภาพสำหรับโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบผสมโดยมีตัวหน่วงเป็นแบบแปรผันตามเวลาที่เป็นช่วง

1. ฟังก์ชันตัวหน่วงแปรผันตามเวลา $h(t): R^+ \to R^+$ และ $\sigma_i(t): R^+ \to R^+$ ที่สอดคล้องกับ

$$0 \le h_1 \le h(t) \le h_2,\ 0 \le \rho_1 \le \sigma_1(t) \le \sigma_2(t) \le \rho_2,\ t \in \mathbb{R}^+\ t \in R^+$$

2. เงื่อนไขเริ่มกำหนดโดย $\phi(t) \in R^1 := R^1\left(\left[-\tau_{max}, 0\right], R^n\right)$ ที่สอดคล้องกับนอร์มต่อไปนี้

$$\|\phi\|_{\tau_{\max}} = \sup_{s\in[-\tau_{\max},0]} \left\{|\phi(s)|, |\dot{\phi}(s)|\right\}$$

3. ฟังก์ชันกระตุ้นการตัดสินใจ $f \in C\left(R^n, R^n\right)$ และสอดคล้องกับ F_j^-, F_j^+ โดยที่

$$F_j^- \le \frac{f_j(\alpha_1) - f_j(\alpha_2)}{\alpha_1 - \alpha_2} \le F_j^+$$

สำหรับทุก $\alpha_1 \neq \alpha_2$

โครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อ ได้มีนักวิจัยเริ่มที่จะศึกษากันมากขึ้นในปัจจุบัน [18]-[38] ในงานวิจัย [25] W. Wang และ J. Cao ได้ศึกษาโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อโดยได้อธิบายในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ดังนี้

$$\dot{x}_i(t) = -Dx_i(t) + Ag(x_i(t)) + Bf(x_i(t - \tau(t))) + I(t) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, ..., N$$

โดยที่ $x_i(t) = [x_{i,1}(t), x_{i,2}(t), ..., x_{i,n}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ..., N$ เป็นสถานะของเซลล์ประสาทเทียมของโครงข่ายที่ i, N เป็นจำนวนของโครงข่ายประสาทเทียมที่ใช้ในการเชื่อมต่อ, $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักของตัวเชื่อมต่อ $f(x_i(t))$, $g(x_i(t - \tau(t)))$ เป็นฟังก์ชันกระตุ้นของเซลล์ประสาท I_i เป็นตัวใส่ข้อมูลสัญญาณ $\Gamma = diag\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n\}$ เป็นตัวเชื่อมต่อภายในระหว่างโครงข่าย i และ $j\,(j \neq i)$, $1 \le i.j \le N$, $C = (c_{ij})_{N \times N}$ เป็นตัวเชื่อมต่อภายนอกระหว่างโครงข่ายโดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$c_{ij} \ge 0,\ i \neq j,\ c_{ij} = -\sum_{j=1, j \neq i}^{N} c_{ij}$$

ตัวหน่วง $\tau(t)$ เป็นตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา

ต่อมา J. Cao [24] และ B. Huang [29] ได้ศึกษาโครงข่ายประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อหลายตัว โดยใช้ตัวเชื่อมต่อของสถานะของเซลล์และตัวเชื่อมต่อของสถานะของเซลล์ที่มีตัวหน่วง โดยได้อธิบายในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ดังนี้

$$\dot{x}_i(t) = -Dx_i(t) + Af(x_i(t)) + Bf(x_i(t - \tau)) + I(t) + \sum_{j=1}^{N} c_{ij}\Gamma_1 x_j(t) + \sum_{j=1}^{N} d_{ij}\Gamma_2 x_j(t - \tau)$$

$, i = 1, 2, ..., N$

โดยที่ $x_i(t) = [x_{i,1}(t), x_{i,2}(t), ..., x_{i,n}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ..., N$ เป็นสถานะของเซลล์ประสาทเทียมของโครงข่ายที่ i, N เป็นจำนวนของโครงข่ายประสาทเทียมที่ใช้ในการเชื่อมต่อ,

$A=\{a_{ij}\},\ B=\{b_{ij}\}$ เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักของตัวเชื่อมต่อ $f(x_i(t))$ เป็นฟังก์ชันกระตุ้นของเซลล์ประสาท I_i เป็นตัวใส่ข้อมูลสัญญาณ τ เป็นตัวหน่วงที่เป็นค่าคงที่, $\Gamma_1 = diag\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n\}$, $\Gamma_2 = diag\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$, เป็นตัวเชื่อมต่อภายในระหว่างโครงข่าย i และ $j(j\neq i)$, $1\le i.j\le N$, $C=(c_{ij})_{N\times N}$ เป็นตัวเชื่อมต่อภายนอกระหว่างโครงข่ายโดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$c_{ij}\ge 0,\ i\neq j,\ c_{ij} = -\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N} c_{ij}$$

$$d_{ij}\ge 0,\ i\neq j,\ d_{ij} = -\sum_{j=1,\,j\neq i}^{N} d_{ij}$$

และเงื่อนไขของ $f(x_i(t))$ ได้กำหนดเงื่อนไว้ดังนี้

กำหนด $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ และค่าคงที $\sigma_r^-,\ \sigma_r^+$, ฟังก์ชันกระตุ้นของเซลล์ประสารทสอดคล้องกับ

$$\sigma_r^- \le \frac{f_r(x_1)-f_r(x_2)}{x_1-x_2} \le \sigma_r^+,\ \ r=1,2,...,n$$

ตัวหน่วงแปรผันตามเวลากำหนดเป็นดังนี้

$$0<h_1\le h(t)\le h_2,\ \ 0\le \beta_1\le k_1(t)\le k_2(t)\le \beta_2$$

ซึ่งตัวหน่วงที่เราใช้ไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ซึ่งจะทำให้งานวิจัยเรากว้างกว่างานวิจัยที่มีอยู่แล้วและสามารถใช้ตัวหน่วงเข้าไปในโครงข่ายได้หลากหลายมากขึ้น ต่อมาในส่วนของการศึกษาความเสถียรภาพนั้น งานวิจัยนี้ได้ศึกษาความเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง โดยอาศัยหลักการและทฤษฎีบทของไลปูนอฟ โดยการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกีใหม่ บนพื้นฐานเมตริกซ์กำลังสองนูน รวมกับการปรับปรุงเทคนิคขอบเขต สำหรับพจน์อินทิกรัล เช่น อสมการเวอทิงเกอร์ ต่อมาเราก็ศึกษาพร้อมทั้งหาเงื่อนไขที่เพียงพอใหม่สำหรับการมีเสถียรภาพสำหรับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงพร้อมทั้งมีการเชื่อมต่อแบบผสม สุดท้ายได้สร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขของการควบคุมให้กับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสม และสร้างตัวอย่างเชิงตัวเลขเพื่อยืนยันประสิทธิภาพของการทำงานตัวควบคุมที่สร้างขึ้น

อุปกรณ์และวิธีการวิจัย

1. ทำการรวบรวมเอกสารที่เกี่ยวข้องกับปัญหาที่จะทำวิจัยเพิ่มเติม

2. ศึกษาเอกสารเพิ่มเติมเพื่อหาเทคนิคและผลการวิจัยที่สำคัญและเกี่ยวข้องกับปัญหาที่ต้องการทำวิจัย ซึ่งได้เทคนิคสำหรับการทำวิจัยดังนี้

ทฤษฎีบทพื้นฐานของการมีเสถียรภาพศึกษาได้จากตำรา และจากเอกสารอ้าง อิงที่เกี่ยวข้อง โดยในลำดับแรก จะกล่าวถึงความรู้เบื้องต้น นิยาม ความหมาย และสัญลักษณ์ต่างๆ และทำการทบทวนเอกสารงานวิจัยที่ตีพิมพ์แล้วอย่างครบถ้วนครอบคลุมตาม ลำดับ ดังต่อไปนี้

เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจเราจึงใช้สัญลักษณ์แทนเซตต่างๆ ดังนี้

R แทน เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

R^+ แทน เซตของจำนวนจริงบวกทั้งหมด

R^n แทน เซตของเวกเตอร์ค่าจริงทั้งหมด ที่มีมิติ $(n\times 1)$

$R^{n\times n}$ แทน เซตของเมทริกซ์ค่าจริงทั้งหมด ที่มีมิติ $(n\times n)$

$C_{n,\tau}$ หรือ $C([-\tau,0],R^n)$ แทน ปริภูมิบานาคของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ที่ส่งจากช่วงปิด $[-\tau,0]$ ไปยัง R^n

$C_{n,\tau}^v=\{\phi\in C_{n,\tau}:\|\phi\|_c<v\}$ เมื่อ v เป็นจำนวนจริงบวก

$\|\phi\|_c=\sup\limits_{-\tau\le t\le 0}\|\phi(t)\|$ เมื่อ $\phi\in C_{n,\tau}$

$\dot{x}(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$

กำหนดให้เมทริกซ์ $A\in R^{n\times n}$

$\lambda(A)$ แทน เซตของค่าเจาะจง (eigenvalue) ทั้งหมดของเมทริกซ์ A

$\lambda_{\min}(A)=\min\{\operatorname{Re}\lambda:\lambda\in\lambda(A)\}$

$\lambda_{\max}(A)=\max\{\operatorname{Re}\lambda:\lambda\in\lambda(A)\}$

$A>0$ หมายถึง $x^TAx>0,\quad \forall x\neq 0, x\in R^n$

$A<0$ หมายถึง $x^TAx<0,\quad \forall x\neq 0, x\in R^n$

พิจารณาสมการ

$$\dot{x}(t) = f(t,x) \tag{1}$$

โดยที่ $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, $x_i = x_i(t)$, $f=(f_1,f_2,...,f_n)$ และ $f_i = f_i(t,x_1,x_2,...,x_n)$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$

<u>บทนิยาม 1</u> จุดสมดุลของสมการ (1) คือ $x=a$ ที่ทำให้ $f(t,a)=0$

<u>บทนิยาม 2</u> กำหนดให้ $\overline{0}=(0,0,...,0)$ เป็นจุดสมดุลของสมการที่ (1) แล้วจะกล่าวว่า $\overline{0}$

(1) **เสถียร (stable)** ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon>0$ มี $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$ ซึ่งถ้า $\|x(t_0)\|<\delta$ แล้ว $\|x(t)\|<\varepsilon$ สำหรับทุก $t\ge t_0\ge 0$

(2) **เสถียรเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable)** ถ้า $\overline{0}$ เป็นจุดสมดุลเสถียร และ $\|x(t)\|\to 0$ เมื่อ $t\to\infty$

(3) **ไม่เสถียร (unstable)** ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไข (1) นั่นคือ มี $\varepsilon>0$ ทุก $\delta>0$ มี $x(t_0)$ ซึ่ง $\|x(t_0)\|<\delta$ และ $\|x(t)\|<\varepsilon$ สำหรับบางค่า $t\ge t_0$

<u>บทนิยาม 3</u> ฟังก์ชันไลปูนอฟ (Lyapunov function)

กำหนดให้ $V(x): R^n\to R$ เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า $V(x)$ เป็นฟังก์ชันไลปูนอฟของระบบสมการ (1) ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้จริง

1. $V(x)$ และ ทุกอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ โดยที่ $i=1,2,3,...,n$ ต่อเนื่อง

2. $V(x)$ เป็น **บวกแน่นอน** (positive definite) นั่นคือ $V(\overline{0})=0$ และ $V(x)>0$ สำหรับ $x\neq\overline{0}$

3. อนุพันธ์ของ $V(x)$ เทียบกับ t คือ

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n\\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1}f_1+\frac{\partial V}{\partial x_2}f_2+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}f_n\end{aligned}$$

เป็น **กึ่งลบแน่นอน** (negative semidefinite) นั่นคือ $\dot{V}(\overline{0})=0$ และ $\dot{V}(x)\le 0$ สำหรับ $x\neq\overline{0}$

<u>**ทฤษฎีบท 1**</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\dot{x} = f(t,x) \qquad \text{และ } f(t,\overline{0}) = 0 \text{ เมื่อ } x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

(i) จุดสมดุลของระบบ (2) จะ **เสถียรภาพ** ถ้ามีฟังก์ชันไลปูนอฟ $V(x)$ ที่สอดคล้องกับนิยาม 3

(ii) จุดสมดุลของระบบ (2) จะ**เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ** ถ้ามีฟังก์ชันไลปูนอฟ $V(x)$ ที่สอดคล้องกับบทนิยาม 3 และอนุพันธ์ของ $V(x)$ เป็นลบแน่นอน (negative definite) นั่นคือ ถ้า $\dot{V}(\overline{0}) = 0$ และ $\dot{V}(x) < 0$ สำหรับ $x \neq \overline{0}$

พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีตัวหน่วงซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(t,x_t), \quad t \geq t_0, \\ &x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau,0], \end{aligned} \tag{3}$$

เมื่อ $x(t) \in R^n, \tau \in R^+$, $x_t(\theta) = x(t+\theta), \forall \theta \in [-\tau,0]$, $\phi(t) \in C_{n,\tau}^v$ เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขค่าเริ่มต้น และ $f(t,\phi): R^+ \times C_{n,\tau}^v \to R^n$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและสอดคล้องกับเงื่อนไขลิพชิทซ์ ซึ่ง $f(t,0) = 0$

ทฤษฎีบทไลปูนอพ-ราซูมิคิน (Lyapunov-Razumikhiu Theorem)

ให้ $f(t,\phi): R \times C_{n,\tau} \to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากเซตที่มีขอบเขตของ $C_{n,\tau}$ ไปยังเซตที่มีขอบเขตของ R^n และให้ $u,v,w,p: R^+ \to R^+$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันไม่ลด ซึ่ง $u(s), v(s), w(s), p(s)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก สำหรับ $s > 0, u(0) = v(0) = 0$

ถ้ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง $V: R \times R^n \to R$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

$$u(\|x\|) \leq V(t,x) \leq v(\|x\|), \quad t \in R, \quad x \in R^n$$

และสอดคล้องกับอสมการ

$$\dot{V}(t,x(t)) \leq -w(\|x(t)\|), \text{ถ้า } V(t+\theta, x(t+\theta)) < p(V(t,x(t))), \ \forall \theta \in [-\tau,0]$$

แล้วจะได้ว่า ระบบสมการ **(3)** มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเอกรูป (uniformly asymptotically stable)

ทฤษฎีบทไลปูนอพ-คราซอฟสกี (Lyapunov-Krasovskii Theorem)

ให้ $f(t,\phi): R\times C_{n,\tau} \to R^n$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากเซตที่มีขอบเขตของ $C_{n,\tau}$ ไปยังเซตที่มีขอบเขตของ R^n และให้ $u,v,w: R^+ \to R^+$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันไม่ลด ซึ่ง $u(s),v(s),w(s)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก สำหรับ $s>0, u(0)=v(0)=0$

ถ้ามีฟังก์ชันต่อเนื่อง $V: R\times C_{n,\tau} \to R$ ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

(1). $u(\|\phi(0)\|) \le V(t,\phi) \le v(\|\phi\|_c)$

(2). $\dot{V}(t,\phi) \le -w(\|\phi(0)\|)$

แล้วจะได้ว่า ระบบสมการ (3) มีเสถียรภาพเอกรูป (uniformly stable) และถ้า $w(0)=0$ จะได้ว่า แล้วจะได้ว่า ระบบสมการ **(3)** มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $w(s)>0, s>0$ แล้วจะได้ว่า ระบบสมการ **(3)** มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับเอกรูป (uniformly asymptotically stable)

หมายเหตุ ฟังก์ชัน V ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทข้างต้น ถูกเรียกว่า **ฟังก์ชันไลปูนอฟ**

ทฤษฎีบท 2 กำหนดให้ K เป็นเมทริกซ์สมมาตรจะกล่าวว่า K เป็นเมทริกซ์ลบแน่นอนก็ต่อเมื่อทุกค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) เป็นจำนวนจริงลบ กำหนดให้ K เป็นเมทริกซ์สมมาตรจะกล่าวว่า K เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน ก็ต่อเมื่อทุกค่าเจาะจง (eigenvalue) เป็นจำนวนจริงบวก

บทตั้ง 1 (Schur complement) กำหนดให้ $Q,S,R \in R^{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ซึ่ง

$R(x)>0, Q(x)=Q^T(x)$ และ $R(x)=R^T(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & -R(x) \end{bmatrix} < 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } Q(x)+S(x)R^{-1}(x)S^T(x)<0$$

บทตั้ง 2 $\lambda_{\min}(Q)x^Tx \le x^TQx \le \lambda_{\max}(Q)x^Tx$ สำหรับเมทริกซ์สมมาตร $Q\in R^{n\times n}$ และ สำหรับทุก $x\in R^n$

บทตั้ง 3 สำหรับเมทริกซ์สมมาตรบวกแน่นอน $M(>0)$, r เป็นจำนวนจริงบวกและฟังก์ชันเวกเตอร์ $W:[0,r]\to R^n$ อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\left(\int_0^r W(s)ds\right)^T M\left(\int_0^r W(s)ds\right) \le r\left(\int_0^r W^T(s)MW(s)ds\right)$$

ผลการวิจัย

เรานิยามสัญลักษณ์ที่ใช้ในงานวิจัยดังนี้

- $x_t = \{x(t+s) : s \in [-h,0]\}$,
- $\|x_t\| = sup_{s\in[-h,0]}\|x(t+s)\|$;
- $C([0,t], R^n)$ คือ เซตของฟังก์ชันค่าจริงต่อเน่องบนช่วง $[0,t]$ $\gamma\|\mathrm{w(t)}\|_2$
- $L_2([0,t], R^m)$ หมายถึง เซตของทุกค่า R^m ที่เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[0,t]$
- เมตริกซ์ A เรียกว่า semi-positive definite $A \geq 0$ ถ้า $x^T Ax \geq 0$, ทุกๆค่า $x \in R^n$
- Aเมตริกซ์ A เรียกว่า positive definite $A > 0$ ถ้า $x^T Ax > 0$ ทุกๆค่า $x \neq x \neq 0$;
- $A > B$ หมายถึง $A - B > 0$
- เทอมการสมมาตรของเมตริกซ์ นิยามโดย *

พิจารณาระบบเชิงเส้นที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา ในรูปของสมการ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h(t)) + Bu(t) + W_2 w(t) \tag{1}$$

$$z(t) = Cx(t) + C_d x(t-h(t)) + D_u u(t) + D_w w(t)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0],$$

เมื่อ $x(t) \in R^n$ คือ เวกเตอร์สถานะ

$u(t) \in R^m$ คือ ตัวควบคุมในระบบ

ฟังก์ชันตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลา $h(t)$ แทนด้วย

$$0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2 \qquad t \in [0,T] \tag{2}$$

ฟังก์ชันเริ่มต้น $\phi(t) \in C([-h_2, 0], R^n)$ และตัวรบกวนระบบ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง กำหนดโดย

$$\exists d > 0 : \int_0^T w^T(t)w(t)dt \leq d. \tag{3}$$

ตัวชี้วัดความคงทน ที่เกี่ยวข้องกับระบบ (1) แสดงดังฟักชันต่อไปนี้

$$J = \int_0^T f^0(t, x(t), x(t-h(t)), u(t))dt, \tag{4}$$

เมื่อ $f^0(t,x(t),x(t-h(t)),u(t)):[0,T]\times R^n\times R^n\times R^m\rightarrow R^+$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องไม่เชิงเส้น และสอดคล้องกับ

$$\exists Q_1,Q_2,H: f^0(t,x,y,u)\le\langle Q_1x,x\rangle+\langle Q_2y,y\rangle+\langle Hu,u\rangle \tag{5}$$

สำหรับ $(t,x,y,u)\in R^+\times R^n\times R^n\times R^m$ และ $Q_1,Q_2\in R^{n\times n}$, $H\in R^{m\times n}$ เมตริกซ์สมมาตรบวกจำกัดที่คำนวณได้

สำหรับการอธิบายค่าสเกลาร์ γ เรานิยามค่าดัชนีความทนทานที่เกี่ยวข้องกับสมการ (1) ดังฟังก์ชันตามมานี้

$$J(t)=\int_0^\infty\left[z^T(s)z(s)-\gamma^2w^T(s)w(s)\right]ds. \tag{6}$$

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือ การออกแบบตัวควบคุมย้อนกลับ H_∞ ของระบบ ด้วยตัวควบคุม $u(t)=Kx(t)$

นิยาม 2.1 กำหนดให้ $\alpha>0$ คำตอบศูนย์ของระบบ (1) จะเป็น การมีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง (exponentially stabilizable) ถ้ามีจำนวนบวก $N>0$ ซึ่งทุกคำตอบ $x\,x(t,\phi)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\|x(t,\phi)\|\le Ne^{-\alpha t}\|\phi\|,\quad \forall t\ge 0$$

นิยาม 2.2 ระบบที่เป็นไปตามนิยาม 2.1 ระบบ (1) จะกล่าวว่า มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลังแบบทนทาน กับ H_∞ ซึ่งมีขอบเขต γ ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. สำหรับระบบ (1) สำหรับ $w(t)=0$ คำตอบหรือจุดสมดุลนั้นจะมีเสถียรภาพ
2. ภายใต้สมมติฐานเงื่อนไขเริ่มต้นศูนย์ ผลลัพธ์ตัวควบคุม $z(t)$ สอดคล้องเงือนไข $\|z(t)\|_2\le\gamma\|w(t)\|_2$ สำหรับ $w(t)\ne 0, w(t)\in L_2[0,\infty]$

ต่อไปเราจำนำเสนอเทคนิคที่นิยมใช้ ซึ่งถูกใช้ในการพิสูจน์

บทตั้ง 2.3 (Cauchy inequality) สำหรับเมตริกซ์สมมาตรบวกใดๆ $N\in M^{n\times n}$ และ $x,y\in R^n$ จะได้

$$\pm 2x^Ty\le x^TNx+y^TN^{-1}y$$

บทตั้ง 2.4 [6] สำหรับเมตริกซ์สมมาตรบวกใดๆ $M > 0$ จำนวน $\gamma > 0$ และฟังก์ชันเวกเตอร์ $\omega : [0, \gamma] \to R^n$ ซึ่งถูกกำหนดไว้ดีแล้ว อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\left(\int_0^\gamma w(s)ds\right)^T M\left(\int_0^\gamma w(s)ds\right) \le \gamma\left(\int_0^\gamma w^T(s)Mw(s)ds\right).$$

เรานำเสนอระบบ nominal ดังสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Dx(t-h(t)) + Bu(t) + W_2 w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + C_d x(t-h(t)) + D_u u(t) + D_w w(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-h_2, 0] \end{aligned} \tag{7}$$

ก่อนที่เราจะหาเงื่อนไขของการมีเสถียรภาพแลลเลขชี้กำลัง จะกำหนดให้

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_{\min}(P^{-1}) \\ ,\lambda_2 &= \lambda_{\max}(P^{-1}) + 2\,\tau_2 \lambda_{\max}[P^{-1}(Q\,P^{-1}] \\ &+ 2\,\tau_2{}^2 \lambda_{\max}[P^{-1}(R)\,P^{-1}] + (\tau_2 - \tau_1)^2 \lambda_{\max}[P^{-1}(U)\,P^{-1}]. \end{aligned} \tag{8}$$

ทฤษฎีบทที่ 1 สำหรับค่าทีให้ $\kappa, \gamma > 0$ ระบบ (8) จะเป็นระบบที่เสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง κ และสอดคล้องเงื่อนไข $\|z(t)\|_2 \le \gamma \|w(t)\|_2$ ถ้ามี P, Q, R, U (positive definite matrices) และสอดคล้องกับ LMI ดังต่อไปนี้

$$\Xi_1^* = \Xi^* - [0\ 0\ 0\ {-I}\ I\ 0\ 0\ 0]^T \times e^{-2\alpha h}{}_2 U[0\ 0\ 0\ {-I}\ I\ 0\ 0\ 0] < 0, \tag{9}$$

$$\Xi_2^* = \Xi^* - [0\ 0\ I\ 0\ {-I}\ 0\ 0\ 0]^T \times e^{-2\alpha h2}[0\ 0\ I\ 0\ {-I}\ 0\ 0\ 0] < 0, \tag{10}$$

$$\Xi^* = \begin{bmatrix} \Xi_{11}^* & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} & \Xi_{16}^* & P^T C^T & 0 \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & \Xi_{25} & \Xi_{26} & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & \Xi_{35} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & \Xi_{45} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & \Xi_{56} & 0 & P^T C_d^T \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{11}$$

เมื่อ

$\Xi_{11}^{*} = [A+\alpha I]P+P[A+\alpha I]^T-BB^T-(e^{-2\alpha\tau_1}+e^{-2\alpha\tau_2})R+2Q-0.5P^TC^TD_uB^T-0.5BD_uCP$

$\quad - 0.25BB^TD_uD_u+aP^2+cYY^T,$

$\Xi_{12} = PA^T-0.5B^TB+2AP,$

$\Xi_{13} = e^{-2\alpha\tau_1}R,$

$\Xi_{14} = e^{-2\alpha\tau_2}R,$

$\Xi_{15} = DP+C^TC_d-0.5BD_uC_dP,$

$\Xi^{*}_{16} = B_w+P^TC^TD_w-0.5BD_uD_w,$

$\Xi_{22} = (\tau_1^2+\tau_2^2)R+(\tau_2-\tau_1)^2U-4P+\gamma 4CC^T+I,$

$\Xi_{25} = DP+2DP,$

$\Xi_{26} = B_w,$

$\Xi_{33} = -e^{-2\alpha\tau_1}Q-e^{-2\alpha\tau_1}R-e^{-2\alpha\tau_2}U;$

$\Xi_{35} = e^{-2\alpha\tau_2}U,$

$\Xi_{44} = -e^{-2\alpha\tau_2}Q-e^{-2\alpha\tau_2}R-e^{-2\alpha\tau_2}U,$

$\Xi_{45} = e^{-2\alpha\tau_2}U,$

$\Xi_{55} = -2e^{-2\alpha\tau_2}U+bP_2,$

$\Xi_{56} = P^TC_d^TD,$

$\Xi_{66} = -\gamma^2I+DT_wD_w+\gamma/2,$

$\Xi_{21} = 2BY.$

นอกจากนี้,

$$u(t) = -(1/2)B^TP^{-1}x(t),\ t>0 \tag{12}$$

คือ ตัวควบคุมย้อนกลับ

และ $x(t,\phi)$ คือคำตอบของระบบกำหนดโดย

$$\left\|x(t,\phi)\right\| \le \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}e^{-\alpha t}\left\|\phi\right\|$$

พิสูจน์

เพื่อให้การพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวง่ายขึ้น เราจึงกำหนดให้

$$Y = P^{-1}$$

$$y(t) = Yx(t)$$

โดยการใช้ตัวควบคุมย้อนกลับ (10) เราจะพิจารณา Lyapunov-Krasovskii functional ดังต่อไปนี้

$$V(t, x_t) = \sum_{i=1}^{6} V_i,$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
V_1 &= x^T(t)Yx(t),\\
V_2 &= \int_{t-h_1}^{t} e^{2\alpha(s-t)} Yx^T(s)QYx(s)ds,\\
V_3 &= \int_{t-h_2}^{t} e^{2\alpha(s-t)} Yx^T(s)QYx(s)ds,\\
V_4 &= h_1 \int_{-h_1}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)} Y\dot{x}^T(\tau)RY\dot{x}(\tau)d\tau ds,\\
V_5 &= h_2 \int_{-h_2}^{0}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)} Y\dot{x}^T(\tau)RY\dot{x}(\tau)d\tau ds,\\
V_6 &= h_2 h_1 \int_{t-h_2}^{t-h_1}\int_{t+s}^{t} e^{2\alpha(\tau-t)} Y\dot{x}^T(\tau)UY\dot{x}(\tau)d\tau ds,
\end{aligned}$$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$\lambda_1\|x(t)\|^2 \le V(t, x_t) \le \lambda_2\|x(t)\|^2, \quad \forall t \ge 0 \tag{13}$$

หาอนุพันธ์ของ $V(x_t)$ ของคำตอบตามสมการ (1) เราจะได้

$$\dot{V}_1 = y^T(t)\left[PA^T + AP\right]y(t) - y^T(t)BB^T y(t) + 2y^T(t)DPy(t-h(t)),$$

$$\dot{V}_2 = y^T(t)Qy(t) - e^{-2\alpha h_1} y^T(t-h_1)Qy(t-h_1) - 2\alpha V_2,$$

$$\dot{V}_3 = y^T(t)Qy(t) - e^{-2\alpha h_2} y^T(t-h_2)Qy(t-h_2) - 2\alpha V_3,$$

$$\dot{V}_4 = h_1^2 \dot{y}^T(t)R\dot{y}(t) - h_1 e^{-2\alpha h_1} \int_{t-h_1}^{t} \dot{y}^T(s)R\dot{y}(s)ds - 2\alpha V_4,$$

$$\dot{V}_5 = h_5^2 \dot{y}^T(t)R\dot{y}(t) - h_2 e^{-2\alpha h_2} \int_{t-h_2}^{t} \dot{y}^T(s)R\dot{y}(s)ds - 2\alpha V_5,$$

$$\dot{V}_6 = (h_2 - h_1)^2 \dot{y}^T(t)U\dot{y}(t) - (h_2 - h_1)e^{-2\alpha h_2} \int_{t-h_1}^{t-h_2} \dot{y}^T(s)U\dot{y}(s)ds - 2\alpha V_6,$$

โดยการประยุกต์ใช้บทแทรก 2 และสูตรของ Leibniz-Newton 1 ทำให้เราได้ว่า

$$-h_1 \int_{t-h_1}^{t} \dot{y}^T(s)R\dot{y}(s)ds \le -y^T(t)Ry(t) + 2y^T(t)Ry(t-h_1) - y^T(t-h_1)Ry(t-h_1)$$

$$-h_2 \int_{t-h2}^{t} \dot{y}^T(s)R\dot{y}(s)ds \le -y^T(t)Ry(t) + 2y^T(t)Ry(t-h_2) - y^T(t-h_2)Ry(t-h2_1)$$

และกำหนดให้ $\beta = \dfrac{h_2 - h(t)}{h_2 - h_1} \le 1.$ ทำให้เราสามารถ หาได้ว่า อสมการดังต่อไปนี้เป็นจริงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
-(h_2 - h_1)\int_{t-h_2}^{t-h1} \dot{y}^T(s)U\dot{y}(s)ds \le & -[y(t-h(t)) - y(t-h_2)]^T U[y(t-h(t)) - y(t-h_2)] \\
& -[y(t-h_1) - y(t-h(t))]^T U[y(t-h_1) - y(t-h(t))] \\
& -\beta[y(t-h_1) - y(t-h(t))]^T U[y(t-h_1) - y(t-h(t))] \\
& -(1-\beta)[y(t-h(t)) - y(t-h_2)]^T U[y(t-h(t)) - y(t-h_2)]
\end{aligned}$$

โดยการใช้ความสัมพันธ์ของการมีเอกลักษณ์ ในรูปของสมการ

$$P\dot{y}(t) - APy(t) - DPy(t-h(t) + 0.5BB^T y(t) - W_2 w(t) = 0,$$

หลังจากนั้นคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $-2y(t)$ และ $-2\dot{y}(t)$ ตามลำดับ จะได้

$$-2y^T(t)P\dot{y}(t)-2y^T(t)APy(t)-2y^T(t)DPy(t-h(t)-y^T(t)BB^T y(t)-2y^T(t)W_2w(t)=0,$$

$$-2\dot{y}^T(t)P\dot{y}(t)-2\dot{y}^T(t)APy(t)-2\dot{y}^T(t)DPy(t-h(t)-\dot{y}^T(t)BB^T y(t)-2\dot{y}^T(t)W_2w(t)=0,$$

โดยการเพิ่มคุณสมบัติของการเป็นศูนย์ของสมการ (10) และความสัมพันธ์

$$e^{\alpha t} f^0(t,x(t),x(t-h(t)),u(t)) - e^{\alpha t} f^0(t,x(t),x(t-h(t)),u(t)) = 0$$

และโดยการใช้เงื่อนไขของสมการ (4) ทำให้เราสามารถประมาณค่า สิ่งที่ตามมาได้ดังต่อไปนี้

$$4y^T(t)W_2w(t) \le 2w^T(t)w(t) + 2y^T(t)W_2y(t)$$

$$2\dot{y}^T(t)W_2w(t) \le w^T(t)w(t) + \dot{y}^T(t)W_2\dot{y}(t)$$

$$\begin{aligned} f^0(t,x(t),x(t-h(t)),u(t)) &\le \langle Q_1x(t),x(t)\rangle + \langle Q_2x(t-h(t)),x(t-h(t))\rangle + \langle Hu(t),u(t)\rangle \\ &\le \langle PQ_1Py(t),y(t)\rangle + \langle PQ_2Py(t-h(t)),y(t-h(t))\rangle + 0.25\langle BHB^T y(t),y(t)\rangle \end{aligned}$$

$$2\langle W_0 f(.),\ \dot{y}\rangle \le \langle Q_1x(t),\ x(t)\rangle$$

โดยการใช้บทแทรก (2) สูตรของ Leibniz-Newton และจากสมการที่ (12)-(13)

ทำให้เราสามารถประมาณค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x_t)+2\alpha V(t,x_t) \le \eta^T(t)W\eta(t) &- \beta[y(t-h_1)-y(t-h(t))]^T e^{-2\alpha h_2}U[y(t-h_1)-y(t-h(t))] \\ &-(1-\beta)[y(t-h(t))-y(t-h_2)]^T e^{-2\alpha h_2}U[y(t-h(t))-y(t-h_2)], \end{aligned} \tag{14}$$

เมื่อ

$$W=\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & W_{14} & W_{15} \\ * & W_{22} & 0 & 0 & W_{25} \\ * & * & W_{33} & 0 & W_{35} \\ * & * & * & W_{44} & W_{45} \\ * & * & * & * & W_{55} \end{bmatrix},$$

และ $\eta(t)=[y(t),\dot{y}(t),y(t-h_1),y(t-h_2),y(t-h(t))]$.

เนื่องจาก $0 \le \beta \le 1$ และ $(1-\beta)M_1 + \beta M_2$ เป็นการconvex combination ระหว่าง M_1 และ M_2

ดังนั้น $(1-\beta)M_1 + \beta M_2 < 0$ จึงสมมูลกับ $\mathscr{M} M_1 < 0$ และ $M_2 < 0$

โดยทฤษฎีของ Schur complement อสมการ $M_3 < 0$ และ $M_4 < 0$ จึงสมมูลกับ $M_3 < 0$ และ $M_4 < 0$ ตามลำดับ

ดังนั้นจาก สมการ (8)-(9) และ (14) เราจะได้

$$\dot{V}(t,x_t) \le -2\alpha V(t,x_t), \quad \forall t \ge 0$$

นอกจากนี้ ใช้เงื่อนไขที่ (12) เราจะได้

$$\lambda_1 \|x(t,\phi)\|^2 \le V(t,x_t) \le V(0,x_0)e^{-2\alpha t} \le \lambda_2 e^{-2\alpha t}\|\phi\|^2, \quad \forall t \ge 0$$

ดังนั้น

$$\|x(t,\phi)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} e^{-\alpha t}\|\phi\|, \quad \forall t \ge 0.$$

ดังนั้น ระบบ (1) มีเสถียรภาพแบบเลขชี้กำลัง α

เพื่อให้การพิสูจน์ทฤษฎีบทสมบูรณ์ เราจะมีการหาขอบเขตของ $\gamma\|w(t)\|_2$ สำหรับ $w(t) \ne 0, w(t) \in L_2[0,\infty]$ เราสมมติให้

$$x(t) = 0, t \in [-h(t), 0]$$

จึงกำหนดให้

$$J = \int_0^\infty \left[z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)\right]d(t)$$

โดยความจริงที่ว่า $V(t,x_t)\big|_{t=0}$ ภายใต้ เงื่อนไขศูนย์เริ่มต้น

$$V(t,x_t)\big|_{t=\infty} \ge 0$$

และ $\int_0^\infty 2\alpha V(t)dt| \geq 0$

เราจึงได้ว่า

$$J_\tau = \int_0^\tau \left[z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(t,x) + 2\alpha V(t) \right] d(t)$$

$$= \int_0^\tau \psi^T(t)\Theta\psi(t)dt$$

เมื่อ
$$\psi = [y(t), \dot{y}(t), y(t-h_1), y(t-h_2), y(t-h(t)), w(t)]$$
$$\Theta = \left[(1-\beta)W_1^* + \beta W_2^* \right]$$

เราจึงได้ว่า $\Theta < 0$ ดังนั้น $J_r < 0$

ดังนั้น เราจึงได้ว่า

$$J_\tau = \int_0^\tau \left[z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \right] d(t) \leq 0$$

นั่นคือ $\int_0^\tau z^T(t)z(t)d(t) \leq \int_0^\tau \gamma^2 w^T(t)w(t)dt$

$$\leq \int_0^\infty \gamma^2 w^T(t)w(t)dt$$

สำหรับ $\tau > 0$

ดังนั้น ตัวควบคุมผลลัพธ์ $z(t) \in L_2 \in [0,\infty)$ สอดคล้องกับ $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2, \forall w(t) \in L_2[0,\infty)$ ทำให้การพิสูจน์สมบูรณ์

วิจารณ์ผลการวิจัย

จากการวิจัยนี้ เราได้สร้างสร้างตัวควบคุม H_∞ ใหม่ให้กับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสมเพื่อให้มีความเสถียรภาพ โดยที่ตัวหน่วงเราศึกษา คือ ตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาแบบช่วงซึ่งไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ และการเชื่อมต่อแบบผสม เราจะใช้การเชื่อมต่อระหว่างเซลล์ประสาทเทียมกับเซลล์ประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาโดยอาศัยหลักการและทฤษฎีบทของไลปูนอฟ โดยการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกีใหม่ บนพื้นฐานเมตริกซ์กำลังสองนูน รวมกับการปรับปรุงเทคนิคขอบเขต สำหรับพจน์อินทิกรัล เช่น อสมการเวอทิงเกอร์ ต่อมาเราก็จะได้เงื่อนไขที่เพียงพอใหม่สำหรับการมีเสถียรภาพสำหรับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงพร้อมทั้งมีการเชื่อมต่อแบบผสม

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยก็คิดค้นและออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะ คือ ตัวควบคุมแบบ H_∞ (H_∞ control) ซึ่งตัวควบคุมที่ใส่เข้าไปในโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสมเป็นบางช่วงเวลาและบางจุดของการเชื่อมต่อเท่านั้น ซึ่งจะมีประโยชน์มากในด้านประหยัดค่าใช้จ่ายในการควบคุมและลดเวลาในการประมวลผลของการทำงานของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสม สุดท้ายได้สร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขของการควบคุมให้กับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสม และสร้างตัวอย่างเชิงตัวเพื่อยืนยันประสิทธิภาพของการทำงานตัวควบคุมที่สร้างขึ้นและได้สร้างทฤษฎีบทขึ้นมาใหม่ พร้อมทั้งได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่สร้างขึ้น เพื่อเป็นการยืนยันทฤษฎีบทและสามารถนำไปประยุกต์ในทางอุตสาหกรรมได้จริง

สรุปผลงานวิจัย

ในการวิจัยนี้ เราได้สร้างสร้างตัวควบคุม H_∞ ใหม่ให้กับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสมเพื่อให้มีความเสถียรภาพ โดยที่ตัวหน่วงเราศึกษา คือ ตัวหน่วงที่แปรผันตามเวลาแบบช่วงซึ่งไม่จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ และการเชื่อมต่อแบบผสมเราจะใช้การเชื่อมต่อระหว่างเซลล์ประสาทเทียมกับเซลล์ประสาทเทียมที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลา โดยอาศัยหลักการและทฤษฎีบทของไลปูนอฟ โดยการสร้างฟังก์ชันไลปูนอฟ-คราซอฟสกีใหม่ บนพื้นฐานเมตริกซ์กำลังสองนูน รวมกับการปรับปรุงเทคนิคขอบเขตสำหรับพจน์อินทิกรัล เช่น อสมการเวอทิงเกอร์ ต่อมาเราก็จะได้เงื่อนไขที่เพียงพอใหม่สำหรับการ

มีเสถียรภาพสำหรับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงแปรผันตามเวลาแบบช่วงพร้อมทั้งมีการเชื่อมต่อแบบผสม ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยก็คิดค้นและออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะ คือ ตัวควบคุมแบบ H_∞ (H_∞ control) ซึ่งตัวควบคุมที่ใส่เข้าไปในโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสมเป็นบางช่วงเวลาและบางจุดของการเชื่อมต่อเท่านั้น ซึ่งจะมีประโยชน์มากในด้านประหยัดค่าใช้จ่ายในการควบคุมและลดเวลาในการประมวลผลของการทำงานของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสม สุดท้ายได้สร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขของการควบคุมให้กับการทำงานพร้อมกันของโครงข่ายประสาทเทียมที่ซับซ้อนที่มีตัวหน่วงด้วยการเชื่อมต่อแบบผสม และสร้างตัวอย่างเชิงตัวเพื่อยืนยันประสิทธิภาพของการทำงานตัวควบคุมที่สร้างขึ้นและได้สร้างทฤษฎีบทขึ้นมาใหม่พร้อมทั้งได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่สร้างขึ้น เพื่อเป็นการยืนยันทฤษฎีบทและสามารถนำไปประยุกต์ในทางอุตสาหกรรมได้จริง

เอกสารอ้างอิง

C. Emharuethai and P. Niamsup. 2009. H_∞ control problem for linear time varying systems with time- varying delay. **Advances in Differential Equations and Control Processes.** Volume 4. Number1: 7-27.

C. Emharuethai and P. Niamsup. 2012. Robust. H_∞ control of linear systems with interval non-differentiable time- varying delays. **Proceedings of the 10th world Congress on Intelligent Control and Automation.** IEEE: 1507-1512.

C. Emharuethai and P. Niamsup. 2015. . H_∞ Control for Nonlinear Systems with Time-Varying Delay Using Matrix-Based Quadratic Convex Approach. **Mathematical Problems in Engineering.** Volume 2015. Article ID 473165.

D. Wang and W. Wang. 2009. Delay-dependent robust exponential stabilization for uncertain systems with interval time-varying delays. **J.Control Theory Appl.** 7(3): 257-263

I. Amri, D. Soudani and M. Benrejeb. 2009. Exponential stability and stabilization of linear systems with time varying delays. **6th International Multi-Conference on Systems.** Signals and Devices: 1-6.

K. Gu, V.L. Kharitonov and J.Chen. 2003. **Stability of time-delay system.** Boston: Birkhauser.

L. Yu and J. Chu. 1999. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. **Automatica.** 35 : 1155-1159.

Moon,Y. S., Park, P., Kwon, W. H., and Lee Y. S. 2001. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. **International Journal of Control**.74: 1447-1455.

M.V. Thuan, V.N. Phat and H.M. Trinh. 2012. Dynamic output feedback guaranteed cost control for linear systems with interval time-varying delays in states and outputs. **Applied Mathematics and Computatiou** 218: 10697-10707.

P.T. Nam and V.N. Phat. 2008. Robust exponentially stability and stabilization of linear uncertain polytopic time-delay sysems. **J. Control Theory Appl.** 6(2): 163-170.

P. Niamsup. 2008. Controllability approach to. H_∞ control problem of linear time-varying switched systems. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems: 875-886.

P. Niamsup and V.N. Phat. 2010. $H\infty$ control for nonlinear time-varying delay systems with convex polytopic uncertainties. **Nonlinear Analysis.** 72: 4254-4263.

P. Niamsup, K. Ratchagit and V.N. Phat. 2015. Novel criteria for finite-time stabilization and guaranteed cost control of delayed neural networks. **Neurocomputing** 160: 281-286.

T. Botmart and P. Niamsup. 2010. Robust exponential stability and stabilizability of linear parameter dependent systems with delays. **Apply Math.** Comput., In Press.

V.N. Phat and Phan T. Nam. 2005. Exponential stability criteria of with multiple delays. Elect. J. Dif. **Equations.** 58: 1-9.

V.N. Phat and Q.P. Ha. 2009. $H\infty$ control and Exponential Stability of Nonlinear Nonautonomous Systems with time-Varying Delay. **J OptimTheory Appl.** 142: 603-618.